Objectif CRPE

CRPE 2023 – Concours supplémentaire

Corrigé – Mathématiques

Table des matières

1. EXERCICE 1

Question	Correction
A. 1.	Dans le triangle RDF, le plus grand côté est le côté $[DR]$ donc, c'est l'hypoténuse éventuelle. On calcule séparément $DR^2 = 23{,}41^2 = 548{,}0281$ et $DF^2 + RF^2 = 13{,}80^2 + 18{,}91^2 = 548{,}0281$. On a bien $DR^2 = DF^2 + RF^2$. L'égalité de Pythagore est vérifiée donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle RDF est rectangle en F**.
A. 2.	1 nœud correspond à 1852 m/h, c'est-à-dire 1,852 km/h. $v = \frac{d}{t}$ donc $t = \frac{d}{v}$. On obtient donc $t = \frac{23{,}41}{1{,}852} \approx 12{,}64$. **Le trajet B dure donc environ 13 minutes.**
A. 3. a.	La longueur d'un tour du fort correspond au périmètre d'un cercle de rayon 500 m. $P = 2\pi r = 2\pi \times 500 = 1000\pi \approx 3142$ **La longueur d'un tour du fort est donc bien d'environ 3 142 m.**
A. 3. b.	La distance totale du trajet A est $RF + 2 \times P + FD$=18,91+2$\times$ $3{,}142 + 13{,}80 = 38{,}994$. **La longueur du trajet A est donc d'environ 39 km.**
A. 4.	$v = \frac{d}{t} = \frac{39}{2} = 19{,}5$ km/h. 1 nœud correspond à 1,852 km/h. $v = \dfrac{19{,}5}{1{,}852} \approx 10{,}53$ La vitesse moyenne de la navette lors du trajet retour est donc d'environ **11 nœuds**.
B. 1.	Si le prix des places est de 30 €, l'entreprise vend 450 places**, la recette est** donc $450 \times 30 = \mathbf{13500}$ **€**.

B. 2. a.	$(40 - 30) \div 0{,}1 = 100$ donc on a augmenté le prix de 100 fois 10 centimes. L'entreprise vendra donc $100 \times 3 = 300$ places de moins. Elle en vendra donc $450 - 300 = 150$. $150 \times 40 = 6\,000$. **Dans ce cas, la recette sera bien de 6 000 euros.**
B. 2. b.	$(30 - 10) \div 0{,}1 = 200$ donc on a diminué le prix de 200 fois 10 centimes. L'entreprise vendra donc $200 \times 3 = 600$ places en plus. Elle en vendra donc $450 + 600 = 1\,050$. $1\,050 \times 10 = 10\,500$. **La recette sera alors de 10 500 euros.**
B. 3. a.	Pour un prix unitaire de 10 euros, on retrouve bien une recette de **10500 euros** (en rose sur le graphique en fin d'exercice 1).
B. 3. b.	Pour une recette journalière de 14 000 euros, on obtient deux prix unitaires : environ **16 euros** et environ **29 euros** (en bleu sur le graphique)**.**
B. 3. c.	La recette maximale est obtenue pour un prix unitaire de **22,5 euros**, elle vaut environ **15200 €** (en noir sur le graphique).


15000
14000
13000
12000
11000
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38
40
42
44
46

2. EXERCICE 2

Question	Correction
1.	Il nous faut calculer ici le volume d'un parallélépipède rectangle de dimensions 0,4 m ; 1 m et 1,25 m après conversions de toutes les longueurs en mètre. Pour cela, on multiplie les trois dimensions. $V = 1{,}25 \times 0{,}40 \times 0{,}80$ =0,5 m³. Pour les 30 appuis, on multiplie par 30 : $0{,}5 \times 30 = 15$. **Il faudra donc 15 m³ de bois pour réaliser les 30 appuis avant tronçonnage.**
2. a.	Pour calculer l'aire d'un rectangle, il faut multiplier sa longueur par sa largeur soit $AD \times AB$. Il faut donc calculer la longueur AD. Soit E le sommet du parallélépipède en haut de l'arête verticale contenant D. $AE = 100 - 0{,}72 = 28$ cm $ED = 125 - 80 = 45$ cm Le triangle ADE est rectangle en E, on peut appliquer le théorème de Pythagore : $AD^2 = AE^2 + ED^2$. On a donc $AE^2 = 28^2 + 45^2 = 2809$. Ainsi, AD = $\sqrt{2809} = 53$ cm. **L'aire du rectangle $ABCD$ est donc de 53×40=2120 cm²**
2. b.	L'aire totale des rectangles à peindre pour les 30 appuis est donc de $30 \times 2120 = 63\,600$ cm². On convertit : 1 m² = 10 000 cm². **L'aire à peindre est donc de 6,36 m².**
2. c.	D'après la fiche technique, le rendement est de 5 m² par pot puisqu'un pot contient un demi litre de peinture. **Il faudra donc deux pots de peinture pour peindre les 30 assises en blanc.**

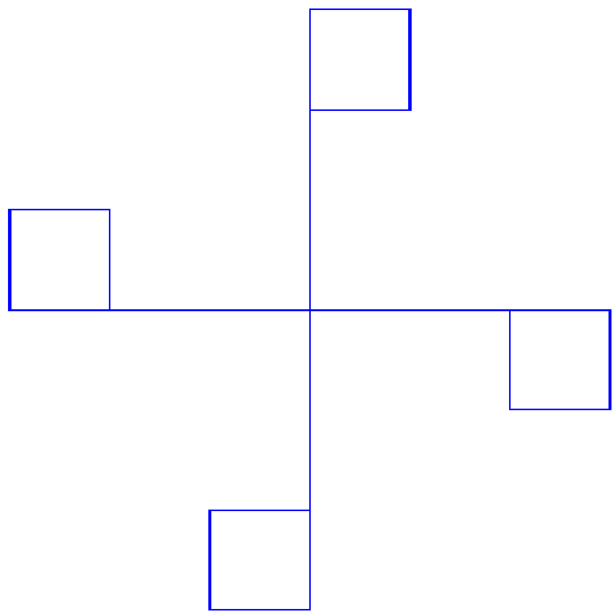
3. EXERCICE 3

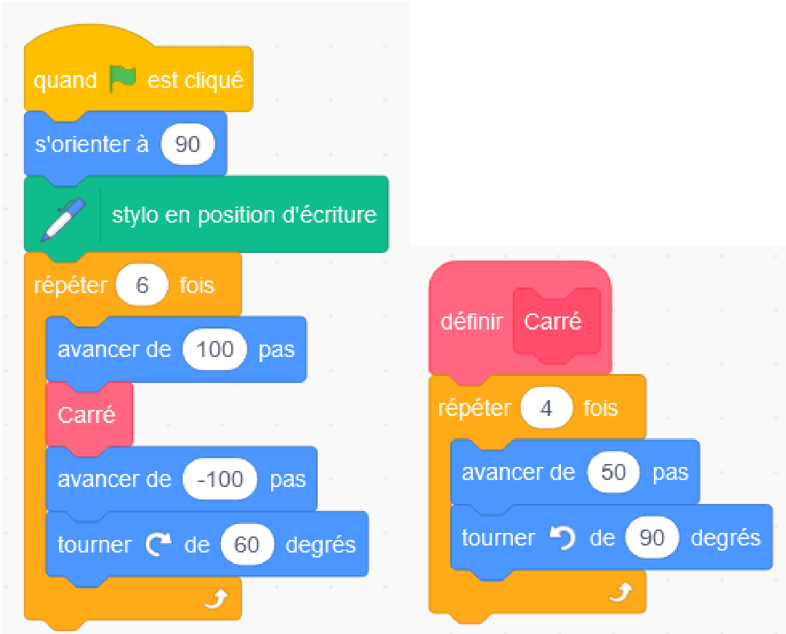
Question	Correction
1. a.	L'enseignante donne une carte choisie au hasard, donc il y a équiprobabilité, dans tout l'exercice, on va calculer les probabilités en utilisant la formule : $$p = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$ En particulier, pour une carte rouge, la probabilité est $p = \frac{nombre\ de\ cartes\ rouges}{nombre\ total\ de\ cartes} = \frac{26}{52} = \mathbf{\frac{1}{2}}$. On pouvait également dire qu'il y a autant de cartes rouges que de cartes noires et conclure.
1. b.	Même principe, la probabilité est le quotient du nombre de piques par le nombre total : $\boldsymbol{p} = \frac{13}{52} = \mathbf{\frac{1}{4}}$
1. c.	Il y a 4 valets, la probabilité est : $\boldsymbol{p} = \frac{4}{52} = \mathbf{\frac{1}{13}}$
1. d.	Il y a deux dames rouges : la dame de cœur et la dame de carreau, on obtient : $\boldsymbol{p} = \frac{2}{52} = \mathbf{\frac{1}{26}}$
1. e.	On utilise la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. L'événement A est « la carte est une dame », sa probabilité est la même que pour l'événement « obtenir un valet » car il y a autant de dames que de valets. L'événement B est « la carte est rouge », c'est l'événement de la question a. L'événement $A \cup B$ est l'événement cherché : « une dame ou une carte rouge » L'événement $A \cap B$ est l'événement de la question d. On obtient donc la probabilité $p = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \mathbf{\frac{15}{52}}$.
2.	Appelons x le nombre de cartes joker à ajouter. La probabilité d'obtenir un joker est $\frac{x}{52+x}$.

	On cherche donc à résoudre $\frac{x}{x+52} = \frac{1}{14}$. On utilise le produit en croix : $14x = x + 52$ ce qui donne $13x = 52$, c'est-à-dire $x = 52 \div 13 = 4$. **Il faut donc ajouter 4 cartes Joker.**

Cliquez sur l'image pour voir un exemple de cours en live avec sujet-type corrigé et exposé d'un candidat :

4. EXERCICE 4

Question	Correction
1.	 Les côtés des carrés mesurent 50 pixels, donc 2 cm.
2.a.	Ligne A : **On construit 6 carrés** et non 4. Ligne B : **On tourne de $360 \div 6 = 60$°** et non 90°. Ligne C : Le carré est orienté dans l'autre sens, **il faut donc tourner dans le sens indirect** (anti-horaire) et non dans le sens direct.

	
2.b.	Le carré EFGH est obtenu en effectuant **la rotation de centre O et d'angle de mesure 60° dans le sens indirect (sans anti-horaire)** du carré ABCD.

5. EXERCICE 5

<table>
<tr><th>Question</th><th>Correction</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>L'étendue est obtenue en effectuant le calcul : $Valeur_{maximale} - Valeur_{minimale}$.
$5\,500 - 1\,923 = 3\,577$
L'étendue des salaires mensuels bruts est égale à $3\,577$.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Le salaire net est obtenu en diminuant de $22~\%$ le salaire brut.
Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de $22~\%$ est $1 - \frac{22}{100} = 0{,}78$.
Ainsi $5\,500 \times 0{,}78 = 4\,290$
Le salaire net de la directrice est bien de $4\,290$ €.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Les charges sociales correspondant à 22 % du salaire brut. Prendre 22 % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par $\frac{22}{100}$ soit $0{,}22$.
Ainsi la formule à écrire dans la cellule B4 et à étirer vers la droite pour calculer les charges sociales est : = B3*0,22 ou = B3*22/100.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Pour obtenir le salaire net, il faut déduire les charges sociales du salaire brut. Plusieurs formules sont possibles :
= B3 – B4
= B3 – B3*22/100
= B3*(1-22/100)</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>$$\frac{4 \times 1\,932 + 5 \times 2\,307 + 2 \times 2\,693 + 3 \times 4\,200 + 5\,500}{4 + 5 + 2 + 3 + 1} = \frac{42\,713}{15} \approx 2\,848$$
Le salaire mensuel brut moyen est environ égal à 2 848 €/</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>On peut utiliser les effectifs cumulés croissants :
<table>
<tr><td>Salaires</td><td>1 923</td><td>2 307</td><td>2 693</td><td>4 200</td><td>5 500</td></tr>
<tr><td>Effectifs</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Effectifs cumulés croissants</td><td>4</td><td>9</td><td>11</td><td>14</td><td>15</td></tr>
</table>
L'effectif total est 15. Or $\frac{15}{2} = 7{,}5$. Donc la médiane est la 8ème valeur, soit 2 307. Le salaire médian est 2 307 €.</td></tr>
</table>

7.

Soit x le salaire brut du nouvel ingénieur. On a donc l'égalité suivante qui est vérifiée :

$x \times \left(1 - \frac{22}{100}\right) = 3\,200$

$x \times 0{,}78 = 3\,200$

$x = \frac{3\,200}{0{,}78} \approx 4\,103$

Son salaire brut doit s'élever à environ 4 103 €.

Autre méthode :

Un salaire net de 3 200 € correspond à 78% du salaire brut. Le salaire net est proportionnel au salaire brut.

Salaire net	3 200	78
Salaire brut	x	100

$$x = \frac{3\,200 \times 100}{78} \approx 4\,103$$

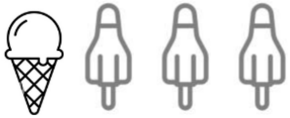
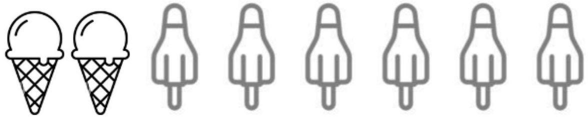
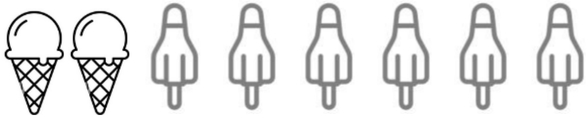
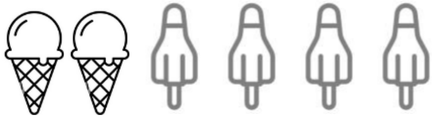
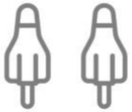
Son salaire brut doit s'élever à environ 4 103 €.

6. EXERCICE 6

Question	Correction
1.	<table><tr><td>Nombre choisi</td><td>43</td><td>57</td><td>52</td><td>60</td><td>16</td></tr><tr><td>Nombre « retourné »</td><td>34</td><td>75</td><td>**25**</td><td>**06**</td><td>**61**</td></tr><tr><td>Différence entre le nombre choisi et son nombre « retourné »</td><td>9</td><td>-18</td><td>**27**</td><td>**54**</td><td>**-45**</td></tr></table>
2.	En observant la dernière ligne du tableau de la question précédente, on conjecture que **la différence entre un nombre et son « retourné » est égale à un multiple de 9.**
3.a.	On note N le nombre choisi, u son chiffre des unités et d son chiffre des dizaines. **Ainsi, on peut écrire $\boldsymbol{N = 10d + u}$.** Effectivement, par exemple, $43 = 10 \times 4 + 3$.
3.b.	Si $N = 10d + u$ alors $\boldsymbol{R = 10u + d}$ étant donné que les chiffres des unités et des dizaines sont permutés.
3.c.	$N - R = (10d + u) - (10u + d)$ $N - R = 10d + u - 10u - d$ $N - R = 9d - 9u$ on réduit l'expression $\boldsymbol{N - R = 9(d - u)}$ on factorise par 9
3.d.	D'après la question précédente, on sait que $N - R = 9(d - u)$. Or d et u sont des nombres entiers (ce sont des chiffres du nombre) donc $d - u$ est un nombre entier. Alors $N - R$ est un multiple de 9. **Donc la différence entre un nombre et son « retourné » est un multiple de 9.**
3.e.	On résout $N - R = 63$ Soit $9(d - u) = 63$ $d - u = \frac{63}{9}$ $d - u = 7$

	d et u sont les chiffres du nombre N donc leurs valeurs possibles appartiennent à $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Pour que $d - u = 7$ il faut que $\begin{cases} d = 9 \\ u = 2 \end{cases} ou \begin{matrix} d = 8 \\ u = 1 \end{matrix} ou \begin{matrix} d = 7 \\ u = 0 \end{matrix}$. **Donc, pour que la différence $N - R$ soit égale à 63, il faut choisir au départ le nombre 92 ou 81 ou 70.**
3.f.	On résout $N - R = 56$ Soit $9(d - u) = 56$ $d - u = \frac{56}{9}$ Or $\frac{56}{9}$ n'est pas u nombre entier alors que d et u sont des nombres entiers donc nécessairement, $d - u$ est également un nombre entier. **Il est donc impossible de choisir un nombre tel que la différence entre ce nombre et son « retourné » soir égale à 56.**

7. EXERCICE 7

Question	Correction
1.	Un élève propose $2 \times 14 + 22 = 6$. 2×14 correspond à 2 lots à 14 zeds chacun soit : 2 fois  ce qui donne :  Ainsi on a :  - () = 2×14-22=6 Ainsi  =6 Donc  =3 Une glace fusée coûte 3 zeds et non 6 zeds. **L'élève a donné le prix de deux glaces fusées et non d'une seule.**
2.	Soit x le prix d'un cône et y le prix d'une glace fusée. On a donc $\begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$. La deuxième équation nous donne : $x = 14 - 3y$. Ainsi l'équation $2x + 4y = 22$ peut s'écrire : $2(14 - 3y) + 4y = 22$. $28 - 6y + 4y = 22$

	$28 - 2y = 22$ $-2y = 22 - 28$ $-2y = -6$ $y = \frac{-6}{-2} = 3$ De plus, comme $x = 14 - 3y$ alors $x = 14 - 3 \times 3 = 14 - 9 = 5$. **Un cône coûte donc 5 € et une glace fusée coûte 3 €.** On peut vérifier ce résultat grâce à l'énoncé : $2 \times 5 + 4 \times 3 = 10 + 12 = 22$ Et $5 + 3 \times 3 = 5 + 9 = 14$