

**Session 2020**

**PE2-20-S2**

*Repère à reporter sur la copie*

**CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES**

**Mardi 7 avril 2020**

**Deuxième épreuve d'admissibilité**

**Mathématiques**

**Durée : 4 heures  
Épreuve notée sur 40**

Rappel de la notation :

- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

**5 points** au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.**

Ce sujet contient 10 pages, numérotées de 1 à 10. Assurez-vous que cet exemplaire est complet. S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

*L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.*

*L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.*

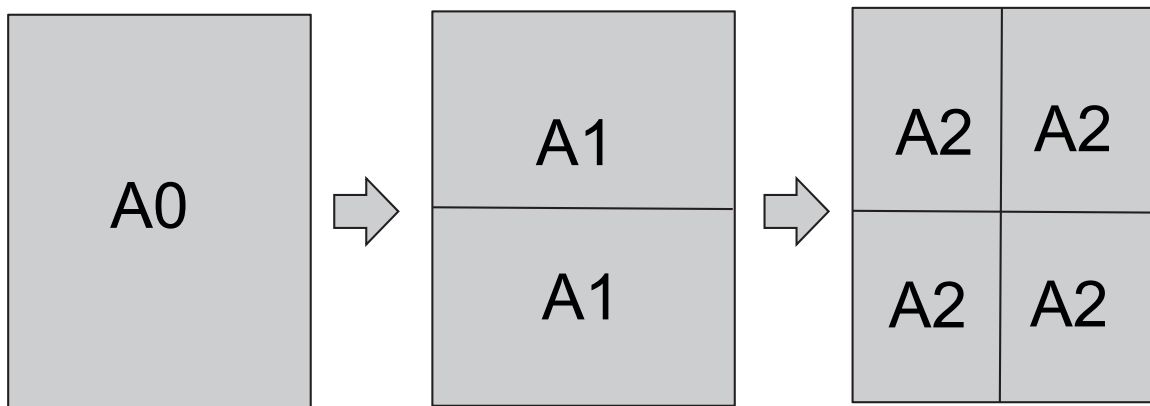
***N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.***

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

## PREMIÈRE PARTIE (13 points)

Dans le domaine de la bureautique, les feuilles de papier ont généralement une forme de rectangle et se répartissent suivant plusieurs formats. Le plus usuel est le format A4.

On appelle format A0 une feuille rectangulaire de longueur 1189 mm et de largeur 841 mm. Si on prend une feuille de format A0 et qu'on la découpe suivant sa longueur en deux rectangles de même dimension, on obtient deux feuilles au format A1. En découpant en deux rectangles de même dimension une feuille au format A1 suivant sa longueur, on obtient deux feuilles au format A2. On recommence avec le même principe pour les autres formats.



### Partie A : Dimensions de formats

Format du papier	A0	A1	A2	A3	A4	A5
Taille (en mm)	841 × 1189	594 × 841	420 × 594	297 × 420		

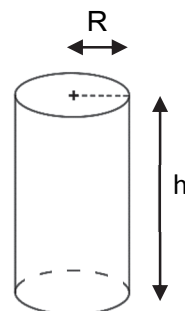
1. Déterminer en mètre carré, l'aire d'une feuille de format A0. On arrondira au décimètre carré.
2. Vérifier que le format A4 a pour dimensions, en centimètre,  $21 \times 29,7$ .
3. Déterminer les dimensions du format A5 en millimètre.

### Partie B : Étude de deux cylindres de révolution

Rappel :

Volume  $V$  du cylindre de révolution de rayon  $R$  et hauteur  $h$  :

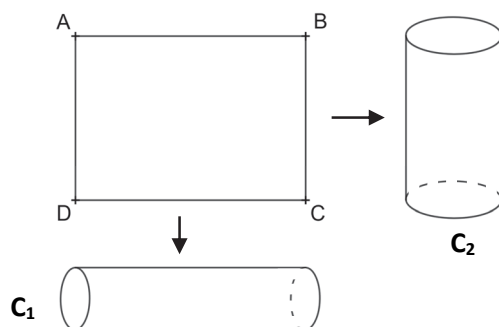
$$V = \pi \times R^2 \times h$$



On dispose d'une feuille A3. On peut l'enrouler de deux façons différentes en mettant bord à bord deux côtés opposés :

En reliant [AB] et [DC] on obtient le cylindre  $C_1$ .

En reliant [AD] et [BC] on obtient le cylindre  $C_2$ .



1. On s'intéresse au cylindre  $C_1$ , dont la hauteur est 42 centimètres.
  - a. Que vaut le rayon de la base de ce cylindre ? Arrondir au millimètre.
  - b. Calculer le volume du cylindre  $C_1$  ? Arrondir au centimètre cube.
2. On s'intéresse au cylindre  $C_2$ , dont la hauteur est 29,7 centimètres.
  - a. Que vaut le rayon de la base de ce cylindre ? Arrondir au millimètre.
  - b. Calculer le volume du cylindre  $C_2$ . Arrondir au centimètre cube.
3. Lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume ?

### Partie C : La pesée

Noé a entamé son paquet de feuilles. Il souhaite savoir combien il lui en reste. Pour cela, il pose sur une balance son paquet de feuilles sans l'emballage.

La balance indique 1 920 g. Il peut aussi lire sur l'emballage du paquet :

Papier très blanc écologique  
Papier fabriqué à partir à 50 % de fibres recyclées provenant de collectes de vieux papiers post-consommation et à 50 % de fibres neuves issues de forêts certifiées PEFC.  
Format A4 : 21 x 29,7 cm.  
Grammage : 80 g/m<sup>2</sup>.  
Velouté et planéité parfaits pour des présentations nettes et soignées.  
Ramette de 500 feuilles.

1. Quelle est l'aire d'une feuille de format A4 en centimètre carré ?
2. Quelle est la masse d'une ramette de 500 feuilles ? Arrondir au gramme.
3. Estimer le nombre de feuilles restantes dans le paquet de Noé.

## Partie D : Calculs de dimensions de format

On appellera « **rapport d'une feuille** » le quotient entre sa longueur et sa largeur.

Dans la feuille de calcul d'un tableur ci-dessous, on a indiqué les formats du papier. On a renseigné la ligne correspondant au format A0 et on a choisi l'arrondi à l'unité pour les nombres des colonnes C et D, jusqu'à la ligne 9.

	A	B	C	D	E
1					
2		Format du papier	largeur	Longueur	Rapport d'une feuille
3		A0	841	1189	
4		A1			
5		A2			
6		A3			
7		A4			
8		A5			
9		A6			

- Donner les formules qu'il convient de saisir dans les cellules C4 et D4 qui permettront de déterminer automatiquement les valeurs des dimensions des formats d'une feuille respectivement de format A1, A2, A3, A4, A5 et A6, en copiant par glissement les colonnes C et D.
- Quelle formule faut-il saisir dans la cellule E3, pour compléter la colonne E, en copiant et glissant ?
- Voici les résultats obtenus dans la colonne E :

	A	B	E
1			
2		Format du papier	Rapport d'une feuille
3		A0	1,413793103
4		A1	1,414634146
5		A2	1,413793103
6		A3	1,414634146
7		A4	1,413793103
8		A5	1,414634146
9		A6	1,413793103

On remarque que ces valeurs sont proches de  $\sqrt{2}$  (on rappelle que  $\sqrt{2} = 1,4142136\dots$ ).  
Démontrer que si une feuille a pour rapport  $\sqrt{2}$  alors, en coupant cette feuille au milieu dans la longueur, on obtient deux feuilles ayant chacune pour rapport  $\sqrt{2}$ .

## Partie E : Un angle droit

On dispose d'une feuille rectangulaire ABCD telle que  $AB = \sqrt{2}$  et  $BC = 1$  (figure 1).

On appelle E le milieu de [DC] et F l'intersection des droites (AE) et (BD).

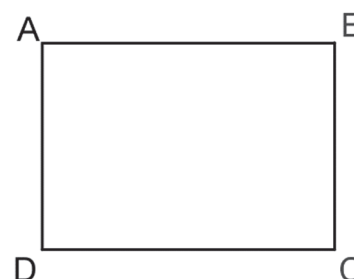


Figure 1

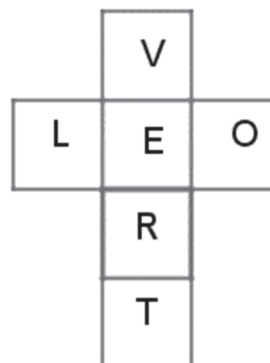
- On appelle G le milieu de [BC]. Démontrer que la longueur AG vaut  $\frac{3}{2}$ .
- Démontrer que AEG est un triangle rectangle en E.
- Démontrer que les droites (BD) et (EG) sont parallèles.
- En déduire que les droites (BD) et (AE) sont perpendiculaires en F.

**DEUXIÈME PARTIE (13 points)**

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

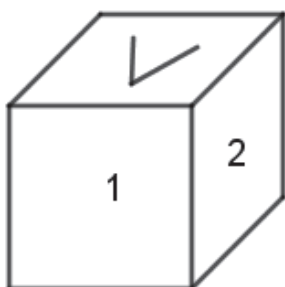
**EXERCICE 1**

1. On donne le patron d'un cube pour lequel est écrite une lettre sur chacune des six faces :

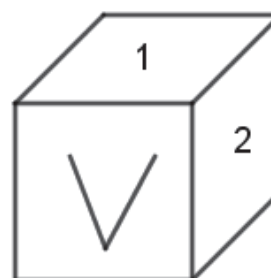


Pour chacun des cubes représentés en perspective ci-dessous, déterminer la lettre écrite sur les faces 1 et 2.

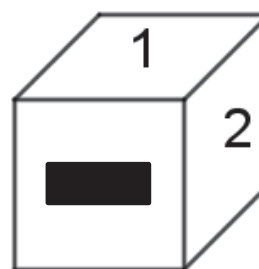
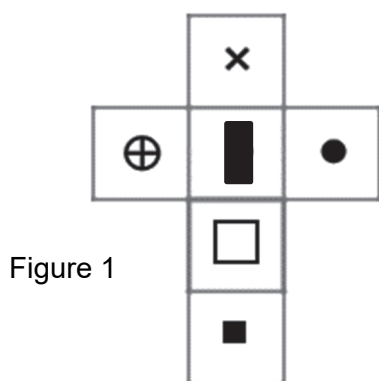
a. Première représentation du cube



b. Seconde représentation du cube



2. On donne à présent le patron d'un cube avec les faces décorées de figures géométriques particulières (figure 1 ci-dessous).

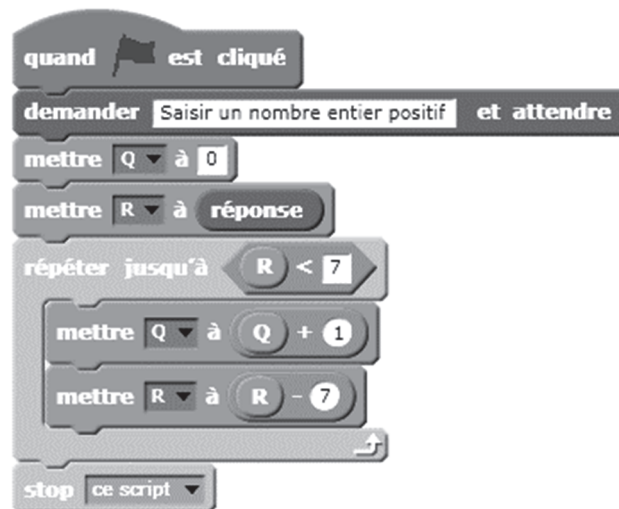


Ce même cube est également représenté en perspective (figure 2).

De combien de façons peut-on remplacer le 1 et le 2 sur le cube représenté en perspective cavalière ? Donner toutes les réponses possibles.

## EXERCICE 2

On considère le programme Scratch suivant :



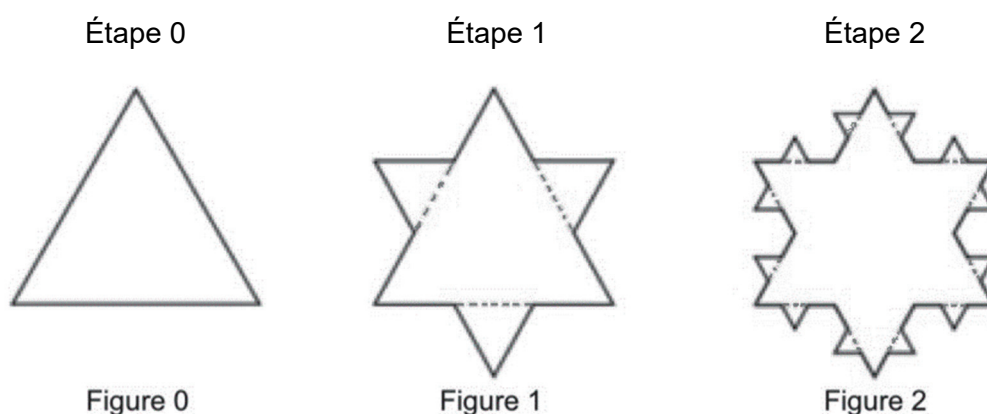
1. Si l'utilisateur saisit le nombre 17, quelles seront les valeurs des variables Q et R en fin d'exécution ?
2. Que représentent, par rapport au nombre saisi par l'utilisateur, les valeurs des variables Q et R obtenues en fin d'exécution ?
3. En déduire les valeurs des variables Q et R obtenues en fin d'exécution lorsque l'utilisateur saisit le nombre 2020.

### EXERCICE 3

Le mathématicien suédois von Koch a imaginé en 1904 une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral par réitération d'une transformation appliquée à chaque côté d'un triangle. Cette figure s'appelle *le flocon de von Koch*.

Pour passer d'une figure à la suivante, chaque côté est partagé en trois segments de même longueur. On remplace le tiers central de chaque segment par un triangle équilatéral sans base. On répète cette opération sur la figure obtenue.

On donne les trois premières étapes de construction :



- Donner le nombre de côtés de la Figure 1, puis de la Figure 2.
  - Déterminer le nombre de côtés de la Figure 3.
  - Exprimer le nombre de côtés de la Figure  $n$  obtenue à l'Étape  $n$  pour un nombre entier positif  $n$ .

On suppose que le côté du triangle équilatéral de la Figure 0 mesure 1 cm.

On appelle  $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$  les longueurs d'un côté des Figures 0, 1, 2, ...,  $n$ .

On appelle  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  les périmètres des Figures 0, 1, 2, ...,  $n$ .

Par exemple,  $L_0 = 1$  et  $P_0 = 3$ .

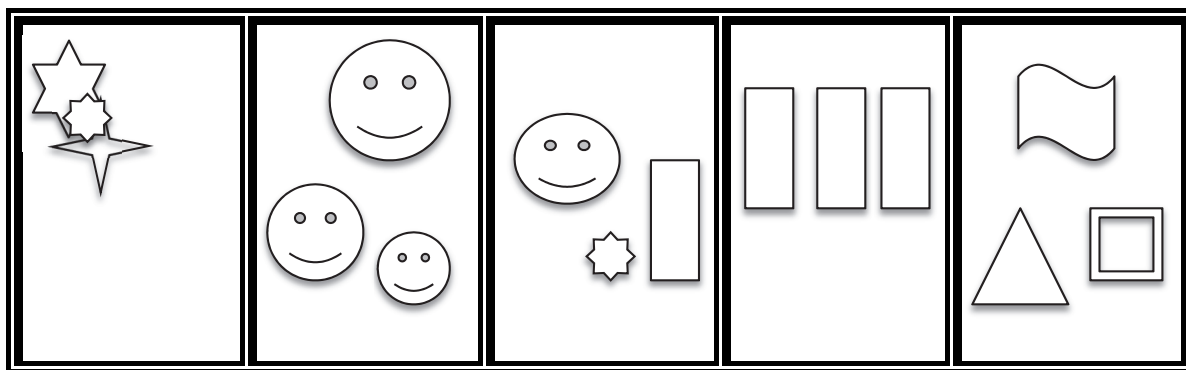
- Justifier que  $L_1 = \frac{1}{3}$ , puis donner sous forme de fraction irréductible les valeurs de  $L_2$  et  $L_3$ .
  - Donner une expression de  $L_n$  en fonction de  $n$ .
- Justifier que  $P_1 = 4$ , puis donner les valeurs de  $P_2$  et  $P_3$ .
  - Donner une expression de  $P_n$  en fonction de  $n$ .
- Peut-on trouver un nombre entier  $n$  tel que le périmètre  $P_n$  de la Figure  $n$  soit supérieur à 1 km ? expliquer le raisonnement suivi.

## TROISIÈME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.

### SITUATION 1

Dans le cadre de la construction du nombre 3 en petite section, les élèves élaborent des affichages à l'aide de gommettes. Les affiches sont reproduites ci-dessous.



Donner trois intérêts d'un tel affichage.

### SITUATION 2

Un enseignant veut évaluer la compréhension de l'écriture décimale par ses élèves de CM1. Il trouve les deux exercices ci-dessous dans un manuel.

Exercice 1 : Ranger les nombres ci-dessous dans l'ordre croissant

4,32    4,56    3,25    4,11    4,78    3,18

Exercice 2 : Ranger les nombres ci-dessous dans l'ordre croissant

4,32    4,7    5    4,09    3,2    3,18

Donner au moins deux conceptions erronées fréquentes des élèves que l'exercice 1 ne permet pas de repérer contrairement à l'exercice 2.



### SITUATION 3

Voici un extrait de la note de service n°2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

**« Modéliser » et « Calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire** qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :

- difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
- difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calculs utilisés.

Dans une classe de CE2, l'enseignant propose le problème ci-dessous :

Une bibliothécaire a reçu 12 cartons de 35 livres chacun. Elle a mis 125 livres le matin sur les étagères de la bibliothèque et 217 l'après-midi.

Combien de livres doit-elle encore ranger ?

<p><b>Élève 1</b></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">125</td> <td style="text-align: right;">332</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">+ 217</td> <td style="text-align: right;">12</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; border-top: 1px solid black;">332</td> <td style="text-align: right;">+ 35</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: right; border-top: 1px solid black;">379</td> </tr> </table> <p>Elle doit ranger 379 livres.</p>	125	332	+ 217	12	332	+ 35		379	<p><b>Élève 2</b></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">35</td> <td style="text-align: right;">1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35 70</td> <td style="text-align: right;">420</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35</td> <td style="text-align: right;">+ 125</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35 70</td> <td style="text-align: right; border-top: 1px solid black;">+ 217</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35</td> <td style="text-align: right; border-top: 1px solid black;">762</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35 70</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35 70</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35 70</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35 <u>70</u></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; border-top: 1px solid black;">420</td> <td></td> </tr> </table> <p>Elle a rangé 762 livres.</p>	35	1	35 70	420	35	+ 125	35 70	+ 217	35	762	35 70		35		35 70		35		35 70		35		35 <u>70</u>		420	
125	332																																		
+ 217	12																																		
332	+ 35																																		
	379																																		
35	1																																		
35 70	420																																		
35	+ 125																																		
35 70	+ 217																																		
35	762																																		
35 70																																			
35																																			
35 70																																			
35																																			
35 70																																			
35																																			
35 <u>70</u>																																			
420																																			
<p><b>Élève 3</b></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">35</td> <td style="text-align: right;">1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">x 12</td> <td style="text-align: right;">125</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">35</td> <td style="text-align: right;">+ 217</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; border-top: 1px solid black;">610</td> <td style="text-align: right; border-top: 1px solid black;">342</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; border-top: 1px solid black;">645</td> <td></td> </tr> </table> <p>Elle a reçu 645 livres.</p>	35	1	x 12	125	35	+ 217	610	342	645		<p>Elle a mis 342 livres sur les étagères.</p>																								
35	1																																		
x 12	125																																		
35	+ 217																																		
610	342																																		
645																																			
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">645</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">- 342</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; border-top: 1px solid black;">303</td> </tr> </table> <p>Elle doit ranger 303 livres.</p>	645	- 342	303																																
645																																			
- 342																																			
303																																			

1. En vous appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessus, analyser les productions des élèves en termes de réussites et d'erreurs pour chacune des compétences « Modéliser » et « Calculer ».
2. Proposer une remédiation ou un accompagnement que l'enseignant pourrait mettre en place pour aider **l'élève 1** à résoudre ce type de problème.

#### SITUATION 4

Lors d'un séjour en classe de mer, des élèves de CM2 ont mené des expériences pour récupérer du sel contenu dans l'eau de mer. Avec deux litres d'eau de mer, ils ont obtenu 70 grammes de sel. L'enseignant décide d'utiliser ce résultat pour leur soumettre l'exercice suivant.

Exercice :

- A. J'ai rapporté 6 litres d'eau de mer de notre séjour scolaire. Quelle quantité de sel va-t-on obtenir en réalisant la même expérience qu'en classe de mer ?
- B. Avec 7 litres d'eau de mer, quelle serait la masse de sel obtenue ?
- C. Si je veux récupérer 350 grammes de sel, combien de litres d'eau de mer dois-je utiliser ?

1. Donner trois procédures que l'on peut attendre d'élèves de CM2 pour répondre à la question **B.** ?

2. On a reproduit ci-dessous, la trace écrite d'un élève :

- A.  $2 \text{ litres} + 2 \text{ litres} + 2 \text{ litres} = 6 \text{ litres}$   
 $70 \text{ grammes} + 70 \text{ grammes} + 70 \text{ grammes} = 210 \text{ grammes}$
- B.  $2 \text{ litres} + 2 \text{ litres} + 2 \text{ litres} + 1 \text{ litre} = 7 \text{ litres}$  ;  $70 + 70 + 70 + 35 = 245 \text{ grammes}$
- C.  $70 \times 5 = 350$      $2 \times 5 = 10 \text{ litres}$

- a. Sur quelle propriété mathématique l'élève s'appuie-t-il pour répondre à la première question de l'exercice ?
- b. Sur quelle propriété mathématique l'élève s'appuie-t-il pour répondre à la question **C.** ?